

정답	01 ②	02 ④	03 ③	04 ③	05 ④	06 ①	07 ③	08 ⑤	09 ④	10 ②
	11 ①	12 ⑤	13 ②	14 ③	15 ⑤	16 ③	17 ④	18 11	19 12	20 20
	21 30	22 15	23 100	24 77	25 19	26 ①	27 ②	28 ①	29 ④	30 21

## 해설

$$01 \quad 4^{\frac{3}{2}} \times \log_3 \sqrt{3} = (2^2)^{\frac{3}{2}} \times \log_3 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^3 \times \frac{1}{2} = 2^2 = 4$$

$$02 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E$$

따라서  $A(A+B) = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore$  모든 성분의 합은 4이다.

$$03 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times 6^{n+1} - 5^n}{6^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times 6 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

$$= 6a = 4$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

$$04 \quad 5 < 3^x < 100 \text{에서 } x = 2, 3, 4$$

$x$ 의 값의 합은  $2 + 3 + 4 = 9$

$$05 \quad A, B \text{가 독립이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{이다.}$$

따라서  $P(A) \cdot P(B) = P(A) - P(B)$

$P(B)$ 를  $x$ 로 두면

$$\frac{2}{3} \cdot x = \frac{2}{3} - x$$

$$\frac{5}{3}x = \frac{2}{3}$$

$$\therefore x = \frac{2}{5}$$

06 B의 개수에 따라 분류하면

i) B가 2개 쓰일 때

$$A, B, B, C, C \text{를 설치} \rightarrow \frac{5!}{2!2!} = 30$$

ii) B가 3개 쓰일 때

$$A, B, B, B, C \text{를 설치} \rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$$

iii) B가 4개 쓰일 때

$$A, B, B, B, B \text{를 설치} \rightarrow \frac{5!}{4!} = 5$$

i), ii), iii)에서

$$30 + 20 + 5 = 55 \text{가지.}$$

07 철수가 받는 두 점수의 합이 70인 경우는 다음과 같다.

관람객 투표	$A\left(\frac{1}{2}\right)$	$B\left(\frac{1}{3}\right)$	$C\left(\frac{1}{6}\right)$
심사위원	$C\left(\frac{1}{6}\right)$	$B\left(\frac{1}{3}\right)$	$A\left(\frac{1}{2}\right)$
확률	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{5}{18}$$

08  $P(0 \leq X \leq 2) = \frac{7}{8}$  이므로

$$P(X = -1) = \frac{3-a}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

09 지반 A, B의 유효수직응력을 각각  $S_A$ ,  $S_B$

저항력을 각각  $R_A$ ,  $R_B$

상대밀도를 각각  $D_A$ ,  $D_B$ 라 하면

$$S_A = 1.44S_B$$

$$R_A = 1.5R_B$$

$$D_B = 65 \text{이므로}$$

$$D_B = -98 + 66 \log \frac{R_B}{\sqrt{S_B}} = 65$$

$$\frac{R_B}{\sqrt{S_B}} = 10^{\frac{163}{66}}$$

$$\frac{R_A}{\sqrt{S_A}} = \frac{1.5R_B}{\sqrt{1.44S_B}} = \frac{5}{4} \cdot 10^{\frac{163}{66}}$$

$$D_A = -98 + 66 \log \frac{R_A}{\sqrt{S_A}}$$

$$= -98 + 66 \log \left( \frac{5}{4} \cdot 10^{\frac{163}{66}} \right)$$

$$= -98 + 66 \left( 0.1 + \frac{163}{66} \right)$$

$$= 71.6$$

10 문제의 그림에서

$$\overline{M_1 M_2} = 1, \overline{B_2 M_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \overline{A_1 B_2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_1 = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \times 1 \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

또, 그림에서 나타나는 직사각형들은 모두 닮음이고 닮음비를 구하면

$$\overline{B_n C_n} : \overline{B_{n+1} C_{n+1}} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{넓이버 } S_n : S_{n+1} = 1 : \frac{1}{3}$$

따라서,  $S_n$ 은 첫항이  $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 공비가  $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

11  $y = a^x$ 를  $y$ 축 대칭시키면  $y = a^{-x}$ 이다.

이것을 다시  $x$ 축으로 3,  $y$ 축으로 2만큼 평행이동하면  $y = a^{-(x-3)} + 2 \dots (*)$

(\*)의 그래프가 (1, 4)를 지나므로

$$4 = a^{-(1-3)} + 2$$

$$\therefore a^2 = 2$$

$$\therefore a = \sqrt{2} (\because a > 0)$$

12 집합  $T$ 의 원소  $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 와 집합  $S$ 의 원소  $A = (a \ b)$ 에 대하여

$$\neg. PA = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (a \ b)$$

$$= \begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } (pa)(qb) - (pb)(qa) = 0$$

이다. 즉  $PA$ 는 역행렬을 갖지 않는다. (참)

ㄴ. 집합  $S$ 의 원소  $B = (c \ d)$ 에 대하여

$$PB = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (c \ d)$$

$$= \begin{pmatrix} pc & pd \\ qc & qd \end{pmatrix}$$

이고  $PA = PB$ 이므로

$$pa = pc, \ pb = pd$$

$$qa = qc, \ qb = qd \quad (p \neq 0, \ q \neq 0)$$

이다. 따라서

$$a = c, \ b = d$$

즉,  $A = B$ 이다. (참)

$$\text{ㄷ. } PA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa & pb \\ qa & qb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pa + pb \\ qa + qb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{이므로 } p(a+b) = 1 \quad q(a+b) = 1 \quad (a+b \neq 0)$$

$$p = \frac{1}{a+b}, \quad q = \frac{1}{a+b}$$

이다. 즉  $T$ 의 원소  $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} \end{pmatrix}$ 이 존재한다. (참)

따라서  $\neg$ ,  $\text{ㄴ}$ ,  $\text{ㄷ}$  모두 참이다.

13 집에서 시장까지의 거리를 확률변수  $X$ 라 하면

$X$ 는 정규분포  $N(1740, 500^2)$ 을 따른다.

따라서,  $P(X \geq 2000)$   
 $= P\left(Z \geq \frac{2000 - 1740}{500}\right)$   
 $= P(Z \geq 0.52) = 0.3$

여기에서 집에서 시장까지의 거리와 자기용 이용에 관한 표를 만들면

	자가용 이용	자가용 이용 안 함	계
2000m 미만	$0.05 \times 0.7$	$0.95 \times 0.7$	0.7
2000m 이상	$0.15 \times 0.3$	$0.85 \times 0.3$	0.3
계			1

따라서,  $\frac{0.05 \times 0.7}{0.05 \times 0.7 + 0.15 \times 0.3} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$

14 내접원의 반지름의 길이를  $r_n$ 이라 하면

$$\triangle A_n O B_n = \triangle A_n O C_n + \triangle C_n O B_n + \triangle A_n C_n B_n$$

$$\frac{1}{2} \times n \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{n^2 + 1} \times r_n + \frac{1}{2} \times n \times r_n + \frac{1}{2} \times 1 \times r_n$$

$$r_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n + 1}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \sqrt{n^2 + 1} \times \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n + 1}$$

$$\lim \frac{S_n}{n} = \lim \left( \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1} + n + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

15  $b_{n+1} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n+1}}{(n+1)!}$   
 $= \frac{a_1 a_2 \dots a_n \times (n+1) + (n-1)!}{(n+1)!}$   
 $= \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n!} + \frac{1}{n(n+1)}$   
 $\therefore (가) = f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$

$b_n$ 을 구하면

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \frac{a_1}{1!} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 1 + \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \right) \\
 &= \frac{2n-1}{n}
 \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{나}) = g(n) = \frac{2n-1}{n}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(13) \times g(7) &= \frac{1}{13 \cdot 14} \times \frac{13}{7} \\
 &= \frac{1}{98}
 \end{aligned}$$

16. ㄱ.  $y = -\log_2 x$ 의 그래프 위의 점  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 과  $P(x_1, y_1)$ 의 위치를 비교하면  $y_1 < 1$ 이므로

$$\frac{1}{2} < x_1 < 1 \quad \therefore \text{참}$$

ㄴ.  $y = 2^x$ 의 역함수는  $y = \log_2 x$ 이고,

$y = -\log_2 x$ 의 역함수는  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로

$y = 2^x$ 와  $y = -\log_2 x$ 의 교점  $R(x_3, y_3)$ 와  $y = \log_2 x$ 와  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 교점  $Q(x_2, y_2)$

는 직선  $y = x$ 에 대해 대칭이다.

$$\therefore x_3 = y_2, x_2 = y_3 \dots\dots (*)$$

$$\therefore x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0 \quad \therefore \text{참}$$

ㄷ. 점  $(1, 0)$ 을 S라 하면

$(\overline{RS})$ 의 기울기  $<$   $(\overline{PS})$ 의 기울기이므로

$$\frac{y_3}{x_3 - 1} < \frac{y_1}{x_1 - 1} \text{이고, 여기에 위의 (*)을 대입하면}$$

$$\frac{x_2}{y_2 - 1} < \frac{y_1}{x_1 - 1} \text{이 성립하므로}$$

$$x_2(x_1 - 1) < y_1(y_2 - 1) (\because x_1 - 1 < 0, y_2 - 1 < 0)$$

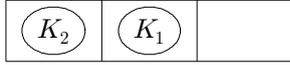
$\therefore$  거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17. 한국, 중국, 일본 학생을 각각  $K_1, K_2, C_1, C_2, J_1, J_2$ 라 하자.

좌석 번호 12에 앉은 사람은 6명 모두 가능하다. 좌석 번호 12에  $K_1$ 이 앉아 있다고 가정하고  $K_2$ 의 자리를 정하면 11, 13, 22가 가능하다.

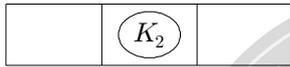
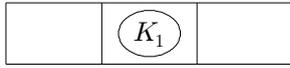
i)  $K_2$ 가 11이나 13에 앉을 때



위 경우 21 자리와 22 자리에 같은 나라 사람이 앉으면 된다.

따라서 i) 경우의 수는  $6 \times 2 \times 4 \times 1 \times 2! = 96$

ii)  $K_2$ 가 22에 앉을 때



위 경우 11 자리와 12 자리에 같은 나라 사람이 앉으면 된다.

따라서 ii) 경우의 수는  $6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2! = 48$

따라서 구하는 확률은  $\frac{96 + 48}{720} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$ 이다.

18.  $2 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \times n(n-1)$

$n-2=9$

$\therefore n=11$

19.  $\log_3(x-4) = \frac{1}{2} \log_3(5x+4)$

$\log_3(x-4)^2 = \log_3(5x+4)$

$(x-4)^2 = 5x+4$

$x^2 - 13x + 12 = 0$

$x = 1, 12$

진수조건에서  $x > 4$ 이므로

$x = 12$

20. 6개의 공을 3개, 3개로 조를 나누고 A, B에 넣으면 된다.

$\left( {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

21 동전 2개를 동시에 던져 2개 모두 앞면이 나올 확률이  $\frac{1}{4}$  이므로,  $X$ 는 이항분포

$B\left(10, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(4X+1) &= 4^2 V(X) \\ &= 4^2 \times \frac{15}{8} \\ &= 30 \end{aligned}$$

22  $a_2, a_4, a_9$ 의 공비를  $r$ 라 하면

$$a_2 = \frac{a_4}{r}, \quad a_9 = a_4 r$$

이다.  $\{a_n\}$ 가 등차수열이므로

$$a_4 - a_2 = a_4 - \frac{a_4}{r} = 2d$$

$$a_9 - a_4 = a_4 r - a_4 = 5d$$

이다. 따라서

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) : 2 = (r-1) : 5$$

$$\left(\frac{r-1}{r}\right) : 2 = (r-1) : 5$$

$$\therefore r = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 6r = 15$$

23 집합  $\{3^1, 3^3, 3^5, \dots, 3^{2n-1}\}$ 에서 서로 다른 두 원소를 곱하여 나올 수 있는 모든 값만을 작은 수부터 적으면  $3^4, 3^6, \dots, 3^{4n-4}$ 와 같이 초항이  $3^4$ , 공비가  $3^2$ 인 등비수열이 된다.

따라서,  $f(n) = 2n - 3$

$$\sum_{n=2}^{11} f(n) = \sum_{n=1}^{10} f(n+1) = \sum_{n=1}^{10} (2n-1) = 10^2 = 100$$

24  $0 \leq \alpha < 1$ 이므로

$0 \leq 2\alpha < 2$ ,  $n \leq 2\alpha$ 에서

$n = 0$  또는 1

i)  $n = 0$ 일 때

$A$ 는 1, 2, 3,  $\dots$ , 9

ii)  $n = 1$ 일 때

$\alpha \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$$\log A = 1 + \alpha \geq 1.5$$

$$A \geq 10\sqrt{10}$$

$$A = 32, 33, \dots, 99$$

따라서  $A$ 의 개수는  $9 + 68 = 77$ 이다.

**25**  $2^{n+1}$  열짜리 블록의 개수는

$$1, 2, 3, 4, \dots, 2^n, \dots, 2^{n+1} \dots \textcircled{㉠}$$

㉠에서 1회 시행후 홀수는 그대로 두고 짝수는 2로 나누어 나타내면

$$1, 3, 5, 7, \dots, (2^{n+1} - 1) \dots \textcircled{㉡}$$

과

$$1, 2, 3, 4, \dots, 2^n \dots \textcircled{㉢}$$

으로 표시된다.

시행을 모두 마쳤을 때, 남은 블록의 합은

i) ㉠은  $f(2^{n+1})$

ii) ㉡은  $1 + 3 + 5 + \dots + (2^{n+1} - 1) = \frac{2^n(2^{n+1} - 1 + 1)}{2} = 2^{2n} = 4^n$

iii) ㉢은  $f(2^n)$

$$\therefore f(2^{n+1}) = 4^n + f(2^n) \leftarrow \text{계차수열을 이용하자.}$$

$$\begin{aligned} f(2^n) &= f(2^1) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\ &= 2 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{4^n + 2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{q}{p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{\frac{4^{n+2} + 2}{3}} = \frac{3}{16}$$

$$\therefore p + q = 16 + 3 = 19$$

**26**  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$  이므로

$$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$\therefore \{a_n\}$ 은 등차수열이다.

첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면

$$a_2 = a + d = -1 \dots \textcircled{1}$$

$$a_3 = a + 2d = 2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{에서 } d = 3$$

$$\therefore a = -4, a_n = 3n - 7$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (3k-7) \\
&= 3 \sum_{k=1}^{10} k - 70 \\
&= 3 \times \frac{10 \times 11}{2} - 70 \\
&= 95
\end{aligned}$$

- 27 공용 자전거 이용시간은 정규분포  $N(60, 10)$ 를 따르므로  $n = 25$ 인 표본 평균  $\bar{X}$ 의 분포는 정규분포  $N(60, 2)$ 를 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{1450}{25}\right) = P(\bar{X} \geq 58) = P(Z \geq -1) = 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

28  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$a = \frac{1}{5}(3 \times 45 - 2 \times 40) = 13$$

$$b = \frac{1}{5}(3 \times 50 - 2 \times 50) = 10$$

$$c = \frac{1}{5}(3 \times 45 - 2 \times 50) = 7$$

$$\therefore a > b > c$$

- 29  $a_{ij} = i - j$ 에서

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = E$$

$$A + A^2 + A^3 + A^4 = O \text{ 이므로}$$

$$A + A^2 + \dots + A^{2010} = A + A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 (2, 1) 성분은 1이다.

30  $\sum_{k=1}^n a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} \dots \textcircled{A}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \log \frac{n(n+1)}{2} \dots \textcircled{B}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{A} - \textcircled{B} : a_n &= \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \log \frac{n+2}{n}
\end{aligned}$$

---

$$\therefore a_{2n} = \log \frac{2n+2}{2n} = \log \frac{n+1}{n}$$

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{20} a_{2k} = \sum_{k=1}^{20} \log \frac{k+1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \{-\log k + \log(k+1)\} \\ &= -\log 1 + \log 21 \\ &= \log 21 \end{aligned}$$

$$\therefore 10^p = 10^{\log 21} = 21$$

