2 교시

9월 3일 수능 모의평가

수학 영역

(A형/B형)

9월 3일 수능 모의평가

수학 영역(A형)

분석 및 해설

정 답									
01 ④	02 ①	03 ⑤	04 ②	05 ③	06 ①	07 ⑤	08 ④	09 ②	10 ④
11 ⑤	12 ①	13 ⑤	14 ②	15 ③	16 ②	17 ①	18 ④	19 ③	20 ③
21 ①	22 27	23 8	24 88	25 11	26 304	27 5	28 4	29 10	30 196

출제 문항 분석

문항	난이도	출제 단원	출제 의도
1	하	지수	지수의 계산
2	하	행렬	행렬의 계산
3	하	수열의 극한	극한의 계산
4	하	행렬과 그래프	인접행렬의 성분
5	하	수열	등비수열
6	하	적분	적분의 계산
7	하	확률	확률의 계산
8	하	함수의 극한	극한의 계산
9	중	확률	조건부확률
10	중	로그	로그의 응용
11	중	지수와 로그	지수-로그함수의 그래프
12	하	수열의 극한	무한급수의 합
13	중	이신확률 변수	기댓값의 계산
14	중	적분	무한급수와 정적분
15	중	순열과 조합	중복조합
16	중	수열	수열의 일반항구하기
17	중	미분	극대와 극소
18	상	무한급수	도형과 무한급수
19	상	행렬	진위판정
20	중	통계	모평균의 구간추정
21	상	미분	함수식의 결정*, **
22	하	함수의 극한	극한의 계산
23	하	행렬	행렬과 연립방정식
24	하	수열	등차수열의 합
25	하	함수의 극한	함수의 연속성
26	중	적분	적분과 미분의 관계
27	중	미분	접선의 방정식
28	중	수열	수열의 극한
29	중	확률	연속확률변수
30	상	지수함수	지수함수의 그래프**

* 신유형 문제

** 수능 출제 가능 문제

출제 경향

수학 A형은 작년 대수능과 비슷하고 6월 모의평가보다는 약간 어렵게 출제되었다.
세부 난이도를 보면 수학 A형은 예년과 같이 변별력을 주기 위한 1 ~ 2문제를 제외하고는 평이한 난이도로 출제되었다.
전체적으로 문제의 유형 및 형태에서 새로운 점은 없었다. 21번(미분법)의 경우 조건을 부등식으로 주어 함수식의 차수까지 수험생 스스로 결정하는 문제여서 문과 학생들에게는 생소하게 느껴졌을 것으로 예상되어 많은 학생들이 어려움을 겪었을 것이다.
30번(지수함수)의 경우 전통적으로 나오는 격자점의 개수를 세는 문제이지만 패턴이 쉽게 파악되지 않아 어려운 문제로 난이도가 조금 높아졌다.
전체적인 출제 형식과 내용에서의 큰 변화는 없으나 미적분과 통계 기본에서 미분법과 적분법의 단원에서 조금씩 어려워지고 있다. 미적분 문제와 격자점 세는 문제가 계속적으로 변별력을 위한 문제로 활용되고 있다.

학습 대책

남은 기간 계산 실수를 줄이는 훈련과 기본 개념과 그것을 묻는 전형적인 문제들을 잘 소화하고 익히는 공부를 해야 한다. 또한, 1 ~ 2문제는 어렵게 출제될 가능성이 있으므로 만점을 노리는 학생들은 난이도 있는 문제도 가끔씩 다루어 봐야 할 것이다.

특히, 미분법과 적분법에 대한 보다 폭넓고 철저한 공부가 필요하다. 미적분이 문과 교육과정에 편입된 이후 소재가 점차 확대되고 난이도도 점차 어려워지고 있다. 행렬에서 명제의 진위판정, 지수-로그함수의 그래프에서 격자점 세기 등 전통적인 문제에 대한 훈련도 필요하다.

해 설

01 | $4^{\frac{3}{2}}\times 2=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times 2$

$=2^{2\times\frac{3}{2}}\times 2$

$=2^3\times 2$

$=16$ 답 ④

02 | $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$3A=\begin{pmatrix}3&0\\6&3\end{pmatrix}$이므로

$3A$의 모든 성분의 합은 12 답 ①

03 | $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{n^3+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n^3}}$

$=5$ 답 ⑤

04 | 그래프에서 한 꼭짓점에 연결된 변 하나마다 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분의 합은 2씩 늘어난다. 주어진 그래프의 변의 개수가 4이므로 성분의 합은 $4\times 2=8$ 답 ②

05 | 수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_3=a_1\times 2^2=12$

$\therefore\ a_1=3$

$a_5=3\times 2^4=48$ 답 ③

06 | $\displaystyle\int_0^1 3x^2dx=\Big[x^3\Big]_0^1$

$=1^3-0^3$

$=1$ 답 ①

07 | A와 B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=4\mathrm{P}(B)=1$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=4\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4},\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{4}$ 답 ⑤

08 | 주어진 그래프에서

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

이므로

$\lim\limits_{x\to-0}f(x)+\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

$=2+2$

$=4$ 답 ④

09 | A 고등학교 1, 2학년 학생 중 임의로 선택한 한 명이 여학생일 사건을 B, 2학년일 사건을 C라고 하자. 구하는 확률은

$\mathrm{P}(C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap C)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{n(B\cap C)}{n(B)}$

$=\dfrac{70}{130}$

$=\dfrac{7}{13}$ 답 ②

10 | $\log\left(\dfrac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\dfrac{V}{C}$에서

$V=2C,\ t=\dfrac{7}{2}t_0$일 때이므로

$k=\log\left(\dfrac{7}{2}-1\right)-4\log\dfrac{2C}{C}$

$=\log\dfrac{5}{2}-4\log 2$

$=\log\dfrac{5}{32}$

$=\log\dfrac{10}{64}$

$=1-\log 64$

$=1-6\log 2$ 답 ④

11 | 점 A, C의 y좌표가 1이므로

$\log_2(x+1)-1=1$

$\log_2(x+1)=2$

$\therefore x=3$

즉 $\mathrm{C}(3,\ 1)$

점 B, D의 y좌표가 -1이므로

$3^{x+1}-2=-1$

$3^{x+1}=1$

$\therefore x=-1$

즉 $\mathrm{D}(-1,\ -1)$

$$\square\mathrm{ADBC}=\triangle\mathrm{ADB}+\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times3$$
$$=1+3$$
$$=4$$

답 ⑤

12 | $3^n\cdot5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수는

$a_n=(n+1)(n+2)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

13 | $m=1,\ m=2$일 때만 $f(m)>0$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=15\times\frac{1}{3}=5$

답 ⑤

14 | 정적분의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$$

$f(x)=ax(x-3)(a<0)$로 놓으면

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2-3ax)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2\right]_0^1$$
$$=\frac{a}{3}-\frac{3}{2}a=-\frac{7}{6}a$$

$\therefore -\frac{7}{6}a=\frac{7}{6}$이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=-x(x-3)=-x^2+3x$

$f'(x)=-2x+3$

$\therefore f'(0)=3$

답 ②

15 | 1, 2, 4, 8 중에서 중복을 허락하여

세 수를 뽑는 방법의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

세 수의 곱이 100초과인 경우를 구하면

i) 8이 3개일 때

$8\times8\times8>100$

ii) 8이 2개일 때

$8\times8\times4>100$

$8\times8\times2>100$

iii) 8이 1개일 때

$8\times4\times4>100$

따라서 세 수의 곱이 100 이하인 경우의 수는

$20-4=16$

답 ③

16 | $\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k=S_n$이므로

(*)에서 ㉠을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$$

$nS_{n+1}-(n+1)S_n=n(n+1)S_n$

$\therefore nS_{n+1}=(n+1)^2S_n$

$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{(n+1)^2}{n}$이므로 $f(n)=(n+1)^2$

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2$$
$$=\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\cdots\times\frac{3^2}{2}\times2$$
$$=n^2\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times\frac{2\times1}{2}$$
$$=n\times n!\times\frac{1}{2}$$

이므로 $g(n)=\dfrac{n}{2}$

$\therefore\ f(4)\times g(20)=(4+1)^2\times\dfrac{20}{2}=250$ 답 ②

17 | $f(x)=x^3-3x^2+a$

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$에서 $3x^2-6x=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 2

극댓값 $f(0)=a$

극솟값 $f(2)=-4+a$

$\therefore\ a(a-4)=-4$

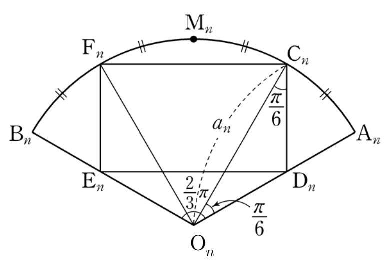
$a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$

$\therefore\ a=2$ 답 ①

18 | 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n$을 이등분하는 점을 C_n이라 하고 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 D_n, E_n, F_n이라 하자.

그림 R_n에서 가장 작은 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 반지름을 a_n이라 하면 $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=a_{n+1}$이다.

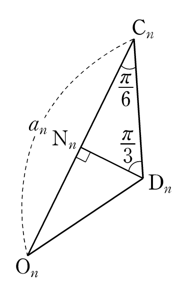


$\angle\mathrm{C}_n\mathrm{O}_n\mathrm{F}_n=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n}=\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{F}_n}$이므로

삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n\mathrm{F}_n$은 정삼각형이다.

$\angle\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle\mathrm{C}_n\mathrm{O}_n\mathrm{D}_n=\dfrac{\pi}{6}$이므로

삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$은 $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}$인 이등변삼각형이다.



그림에서

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{N}_n}=\dfrac{1}{2}a_n$

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$이다.

따라서 $a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$이다.

그림 R_1에서 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{3}\pi$이고

직사각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ S_1=\dfrac{1}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3-1}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

답 ④

19 | ㄱ. $AB+A+B=2E$

$A(B+E)+B+E=2E+E$

$(A+E)(B+E)=3E$ $\cdots$ ㉠

$\therefore\ (A+E)^{-1}=\dfrac{1}{3}(B+E)$ $\therefore$ 참

ㄴ. ㉠에서

$(A+E)(B+E)=3E$이므로

$(A+E)(B+E)=(B+E)(A+E)$

정리하면

$AB+A+B+E=BA+B+A+E$

$AB=BA$ $\therefore$ 참

ㄷ. $A^3+E=O$에서 $(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A+E$의 역행렬이 존재하므로

$A^2-A+E=O$

위 식에서

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$\therefore (A+E)^{-1}=-\dfrac{1}{3}(A-2E)$

㉠에서

$(A+E)^{-1}=\dfrac{1}{3}(B+E)$

$\therefore\ \frac{1}{3}(B+E)=-\frac{1}{3}(A-2E)$

$A+B=E$ $\qquad\qquad \therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

20 | 작년에 운행된 택시의 주행거리를 확률변수 X, X의 분산을 σ^2 표본평균을 $\overline{X}$ 라고 하면

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$

$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$

이므로 모평균 m의 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$\left[\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}},\ \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right]$

이므로

$c=1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=0.49\sigma$

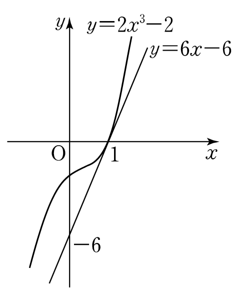
임의로 선택된 택시의 연간 주행거리가 $m+c$ 이하일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le m+c)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{c}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0.49)\\&=0.5+0.1879\\&=0.6879\end{aligned}$$

답 ③

신유형 문제 / 출제 가능 문제

21 |



$y=6x-6$과 $y=2x^3-2$는 모두 $(1,\ 0)$을 지나고 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 6이다.

모든 양의 실수 x에 대하여

$6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$

이므로 $y=f(x)$는 $x=1$에서 $y=6x-6$과 접해야 한다.

$f(x)$가 다항함수이므로

$f(x)-(6x-6)=(x-1)^2\cdot Q(x)$

$x\to\infty$ 일 때 $f(x)\le 2x^3-2$이므로 $f(x)$는 3차 이하이다.

i) $f(x)$가 2차인 경우

$f(x)=(x-1)^2+(6x-6)$

$f(0)=1-6=-5\ne-3$이므로 조건 (가)를 만족하지 않는다.

ii) $f(x)$가 3차인 경우

$f(x)=(x-1)^2(x+a)+6x-6$

$f(0)=a-6=-3$에서 $a=3$

$f(x)=(x-1)^2(x+3)+6x-6$

$\therefore\ f(3)=4\times6+6\times3-6=36$ 답 ①

[다른 풀이]

$6(x-1)\le f(x)\le 2(x^3-1)$에서

$\lim_{x\to1}6(x-1)=0,\ \lim_{x\to1}2(x^3-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로 연속이다.

$\therefore f(1)=0$

또, $x>1$일 때

$\frac{6(x-1)}{x-1}\le\frac{f(x)}{x-1}\le\frac{2(x^3-1)}{x-1}$에서

$\lim_{x\to1+0}\frac{6(x-1)}{x-1}=6,$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+0}\frac{2(x^3-1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+0}2(x^2+x+1)\\&=6\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$이고

$f(x)$는 다항함수이므로 항상 미분가능하다.

$\therefore\ \lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6$이다.

한편 $f(x)$가 4차 이상이면

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x^3-2}=\infty$ 이므로 (나)에 모순이다.

$\therefore\ f(x)$는 3차 이하의 다항함수이다.

i) $f(x)$가 3차 함수이면

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

$f(1)=1+a+b-3=0$

$\therefore a+b=2$ $\cdots$ ㉠

또, $f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(1)=3+2a+b=6$

$\therefore\ 2a+b=3$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=1,\ b=1$

$\therefore\ f(x)=x^3+x^2+x-3$

$\therefore\ f(3)=3^3+3^2+3-3=36$

ii) $f(x)$가 이차함수이면

$f(x)=x^2+ax-3$

$f(1)=1+a-3=0 \quad \therefore a=2$

$f'(x)=2x+2$

$f'(1)=2+2=4$

그런데 $f'(1)=6$이므로 모순

iii) $f(x)$가 일차함수이면

$f(x)=x-3$

$f(1)=1-3=-2\neq 0$이므로 모순이다.

i), ii), iii)에서

$f(3)=36$ 답 ①

22 | $\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{x-2}=\frac{3^3}{3-2}=27$ 답 27

23 | 연립방정식의 해가 $x=-1,\ y=2$이므로

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$가 성립한다.

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\therefore a=4,\ b=4$

$\therefore a+b=4+4=8$ 답 8

24 | $\{a_n\}$의 첫째항 a_1, 공차를 d라 하면

$a_1+a_{10}=a_1+a_1+9d$

$\therefore 2a_1+9d=22$ $\cdots$ ㉠

$\sum_{k=2}^{9}a_k=(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+8d)$

$=8a_1+36d$

$=4(2a_1+9d)$

$=4\times 22$ ($\because$ ㉠에서)

$=88$ 답 88

25 | $f(x)$가 실수 전체집합에서 연속이므로

$f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)$이다.

$\therefore a=\lim_{x\to 3}\frac{(3x+2)(x-3)}{x-3}$

$=3\times 3+2=11$ 답 11

26 | x에 대한 항등식

$\int_0^x f(t)dt=x^3+4x$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4$

$\therefore\ f(10)=3\times 10^2+4=304$ 답 304

27 | $x>0$에서 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=x-10$ 사이의 거리가 최소일때는 기울기가 1인 접선의 접점이 P일 때이다.

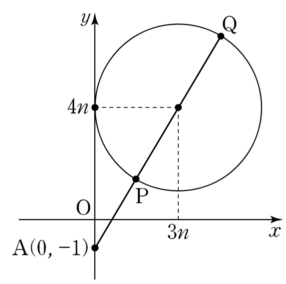
$y'=x^2$이므로

$x^2=1,\ x=1\ (\because x>0)$

따라서 접점은 $(1,\ 4)$

$\therefore a+b=1+4=5$ 답 5

28 |



그림에서 $\mathrm{A}(0,-1)$과 원의 중심을 지나는 직선이 원과 만나는 점을 P, Q라 하면 $a_n=\overline{\mathrm{AQ}}$, $b_n=\overline{\mathrm{AP}}$이다.

$\therefore\ a_n=\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n$

$b_n=\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$

$=\frac{5+3}{5-3}=4$ 답 4

29 | $\mathrm{P}(x\le X\le 3)=a(3-x)\ (0\le x\le 3)$에서

$x=0$일 때

$\mathrm{P}(0\le x\le 3)=a(3-0)=1$이므로

$a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le x<a)=\mathrm{P}\left(0\le X<\dfrac{1}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le x\le 3)-\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{3}\le X\le 3\right)$

$=1-\dfrac{1}{3}\left(3-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ p+q=10$ 답 10

[다른 풀이]

$\mathrm{P}(x\le X\le 3)=a(3-x)\ (0\le x\le 3)$이므로

확률밀도함수를 $f(x)$라고 하면

$\displaystyle\int_x^3 f(x)\,dx=a(3-x)$

$\displaystyle\int_3^x f(x)\,dx=a(x-3)$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=a$

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=1$이므로

$\displaystyle\int_0^3 a\,dx=1,\ a=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le X<a)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\,dx$

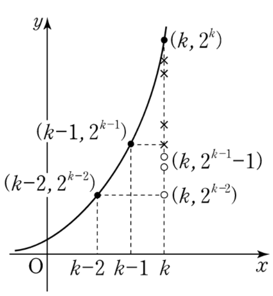
$=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}\,dx$

$=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ p+q=10$ 답 10

출제 가능 문제

30 | i) 순서쌍 $(a,\ b)$가 영역 $y<2^x$에 있을 때



$a=k$일 때 조건을 만족하는 b는

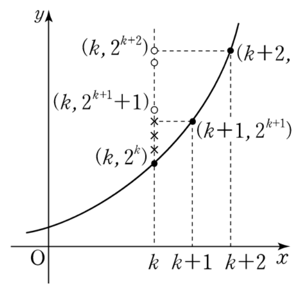
$b=2^{k-2},\ 2^{k-2}+1,\ \cdots,\ 2^{k-1}-1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $2^{k-1}-2^{k-2}$이다.

(단, $b\le 100$이다.)

k	순서쌍 $(a,\ b)$의 개수
1	0
2	2^1-2^0
3	2^2-2^1
4	2^3-2^2
5	2^4-2^3
6	2^5-2^4
7	2^6-2^5
8	$101-2^6$
합계	100

$(a,\ b)$가 영역 $y<2^x$에 있을 때는 100개이다.

ii) 순서쌍 $(a,\ b)$가 영역 $y>2^x$에 있을 때



$a=k$일 때 조건을 만족하는 b는

$b=2^{k+1}+1,\ 2^{k+1}+2,\ \cdots,\ 2^{k+2}$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $2^{k+2}-2^{k+1}$이다.

(단, $b\le 100$이다.)

k	순서쌍 $(a,\ b)$의 개수
1	2^3-2^2
2	2^4-2^3
3	2^5-2^4
4	2^6-2^5
5	$100-2^6$
합계	96

$(a,\ b)$가 영역 $y>2^x$에 있을 때는 96개이다.

i), ii)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 196이다.

답 196

9월 3일 수능 모의평가

수학 영역(B형)

분석 및 해설

정답										
	01 ④	02 ⑤	03 ③	04 ①	05 ②	06 ③	07 ⑤	08 ④	09 ①	10 ④
	11 ①	12 ②	13 ①	14 ②	15 ⑤	16 ④	17 ②	18 ③	19 ⑤	20 ③
	21 ①	22 20	23 14	24 10	25 19	26 9	27 7	28 6	29 11	30 127

출제 문항 분석

문항	난이도	출제 단원	출제 의도
1	하	행렬	행렬의 계산
2	하	함수의 극한	무리수 e의 정의
3	하	미분	삼각함수의 미분
4	하	적분	적분의 계산
5	하	벡터	벡터의 내적
6	하	분수부등식	분수부등식의 해
7	하	일차변환	일차변환의 합성변환
8	하	삼각방정식	삼각방정식의 해
9	하	확률	확률의 계산
10	중	로그	로그의 응용
11	중	이차곡선	포물선의 접선
12	중	수열	수열의 일반항 구하기
13	중	적분	무한급수와 정적분
14	중	확률	기댓값구하기
15	중	공간도형	점과 직선 사이의 거리
16	중	무한급수	도형과 무한 급수
17	중	확률	조건부 확률
18	상	행렬	진위판정
19	중	통계	정규분포
20	중	미분	미분과 함수의 그래프
21	상	상용로그	지표와 가수*, **
22	하	수열	등비수열
23	하	로그	로그방정식의 해
24	하	공간도형	평면의 방정식
25	하	이차곡선	타원과 쌍곡선의 초점
26	중	순열조합	중복조합
27	중	방정식	방정식의 해
28	상	함수의 극한	도형과 극한
29	상	공간도형	정사영**
30	상	적분	정적분의 계산**

* 신유형 문제

** 수능 출제 가능 문제

출제 경향

수학 B형은 작년 대수능보다 쉽게 출제되었고, 비교적 쉽게 출제된 6월 모의평가와는 비슷하게 출제되었다.
세부 난이도를 보면 수학 B형의 경우는 변별력을 주기 위해 출제된 문제도 난이도를 하향하여 출제하였다.
전체적으로 평이하게 출제되었으나 21번(지표와 가수 문제)이 기존의 문제와 조금 다르게 출제되어 다소 생소하여 많은 학생들이 당황해하며 어려움을 겪었을 것이라 예상된다. 또한, 작년 대수능과 같이 29번(공간도형)과 30번(적분법)의 문제는 큰 변화 없이 출제되었다.
형식이나 내용상 새로운 문제는 없었고 지나치게 난이도가 높은 문제도 없었다. 앞으로도 이러한 기조가 유지될 것이라 예상된다.

학습 대책

남은 기간 계산 실수를 줄이는 훈련과 기본 개념과 그것을 묻는 전형적인 문제들을 잘 소화하고 익히는 공부를 해야 한다. 또한, 1 ~ 2문제는 어렵게 출제될 가능성이 있으므로 만점을 노리는 학생들은 난이도 있는 문제도 가끔씩 다루어 봐야 할 것이다.
기존 수능과 같이 지표와 가수, 공간도형, 미적분에서 변별력 있는 문제가 출제되었다. 풀이법을 외워서 푸는 학생은 문제 상황이 조금만 달라져도 당황하여, 실제로는 쉬운 문제임에도 풀지 못하게 되므로 항상 스스로 고민하며 문제를 풀어야 하고, 기본 개념에 충실한 풀이를

해야 한다. 30번 문제에 대하여는 식을 다루는 능력이 필요하므로 다양한 문제를 접하여 대비하여야 한다.

해 설

01 | $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$a+6=10$에서 $a=4$ 답 ④

02 | $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5=e^5$ 답 ⑤

03 | $f'(x)=\cos x-4$이므로

$f'(0)=\cos 0-4=-3$ 답 ③

04 | $\int_0^1 2e^{2x}dx=\left[e^{2x}\right]_0^1=e^2-1$ 답 ①

05 | $\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=0$에서

$|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=4-2t=0$

$\therefore\ t=2$ 답 ②

06 | $\dfrac{(x+2)(x^2+1)}{x-1}\le 0$에서 $x^2+1>0$이므로

$(x-1)(x+2)\le 0,\ x-1\ne 0$

$\therefore\ -2\le x<1$

따라서 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0$이므로 정수 x의 개수는 3이다. 답 ③

07 | $\mathrm{A}(1,0),\ \mathrm{H}(0,-2)$이므로

$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$=k\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$=k\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ k=2$ 답 ⑤

08 | $\sin x=\sin 2x,\ \sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(1-2\cos x)=0$ 이므로

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi$

따라서 모든 해의 합은 $\dfrac{4}{3}\pi$이다. 답 ④

09 | $\mathrm{P}(A\cap B)=k$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{2}k,\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{2}k$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=3k$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{P}(A\cup B)}{\mathrm{P}(A\cap B)}=3$ 답 ①

10 | $\log\left(\dfrac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\dfrac{V}{C}$에서

$V=2C,\ t=\dfrac{7}{2}t_0$일 때이므로

$k=\log\left(\dfrac{7}{2}-1\right)-4\log\dfrac{2C}{C}$

$=\log\dfrac{5}{2}-4\log 2$

$=\log\dfrac{5}{32}$

$=\log\dfrac{10}{64}$

$=1-\log 64$

$=1-6\log 2$ 답 ④

11 | 주어진 포물선의 방정식은 $y^2=4a_nx$

이 포물선의 기울기 n인 접선의 방정식은

$y=nx+\dfrac{a_n}{n}$ 이므로

$\therefore n+1=\dfrac{a_n}{n}$

$\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}n(n+1)=\dfrac{5\cdot 6\cdot 11}{6}+\dfrac{5\cdot 6}{2}$

$=55+15=70$ 답 ①

12 | $\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k=S_n$이므로

(*)에서 ㉠을 빼면

$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=S_n$

$nS_{n+1}-(n+1)S_n=n(n+1)S_n$

$\therefore\ nS_{n+1}=(n+1)^2S_n$

$\therefore\ \dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{(n+1)^2}{n}$ 이므로 $f(n)=(n+1)^2$

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2$$
$$=\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\cdots\times\frac{3^2}{2}\times 2$$
$$=n^2\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times\frac{2\times 1}{2}$$
$$=n\times n!\times\frac{1}{2}$$

이므로 $g(n)=\dfrac{n}{2}$

$\therefore\ f(4)\times g(20)=(4+1)^2\times\dfrac{20}{2}=250$ 답 ②

13 | $\angle P_{n-k}OP_{n+k}=2k\cdot\angle P_1OP_0$

$$=2k\cdot\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\pi$$

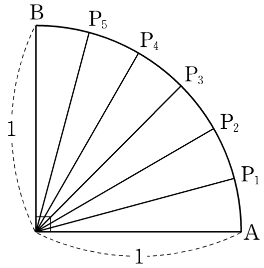
이므로

$$S_k=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\left(\frac{k}{2n}\pi\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{k}{2n}\pi\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{\pi}$$

답 ①

14 | 부채꼴 OAB의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}$이다.



$n=3$이므로 부채꼴 OAB를 6등분한다.

따라서 등분된 각각의 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{\pi}{24}$

부채꼴 OPA 안에 있는 작은 부채꼴의 개수와 부채꼴 OPB 안에 있는 작은 부채꼴의 개수의 차를 확률변수 Y라 하여 확률분포표를 그리면 아래와 같다.

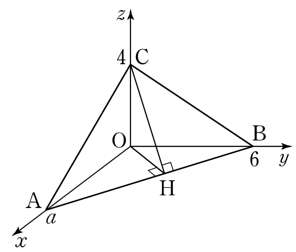
Y	0	2	4	계
$P(Y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$E(Y)=\frac{2\times2+4\times2}{5}=\frac{12}{5}$$

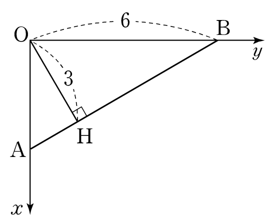
$X=\dfrac{\pi}{24}Y$이므로

$E(X)=E\left(\dfrac{\pi}{24}Y\right)=\dfrac{\pi}{24}\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{\pi}{10}$ 답 ②

15 |



$A(a, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 4)$라 하고,
C에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼수선 정리에서 $\overline{OH}\perp l$
$\overline{CH}=5$, $\overline{CO}=4$이므로 $\overline{OH}=3$



$\therefore\ a^2=\overline{OA}^2=(6\tan B)^2=36\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=12$

답 ⑤

[다른 풀이]

직선 l의 방정식은 $\dfrac{x-a}{-a}=\dfrac{y}{6}$, $z=0$이므로
l 위의 점 P는 $P(-at+a, 6t, 0)$으로 놓을 수 있다.
점 $C(0, 0, 4)$에 대해 $\overline{CP}$의 최솟값이 5이어야 하므로

$$\overline{\mathrm{CP}}^2 = (-at+a)^2 + (6t)^2 + 16$$
$$= (a^2+36)t^2 - 2a^2t + (a^2+16)$$
$$= (a^2+36)\left(t - \frac{a^2}{a^2+36}\right)^2 + a^2 + 16 - \frac{a^4}{a^2+36}$$

$\therefore\ a^2 + 16 - \dfrac{a^4}{a^2+36} = 25$

$a^2 = k$라 놓으면 $k + 16 - \dfrac{k^2}{k+36} = 25$

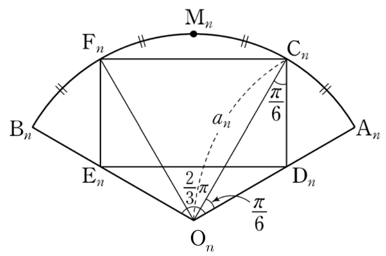
$(k+16)(k+36) - k^2 = 25(k+36)$

$52k + 576 = 25k + 900$

$27k = 324$

$\therefore\ k = a^2 = 12$ 답 ⑤

16 | 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n$을 이등분하는 점을 C_n이라 하고 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 D_n, E_n, F_n이라 하자.
그림 R_n에서 가장 작은 부채꼴 $\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 반지름을 a_n이라 하면 $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = a_{n+1}$이다.

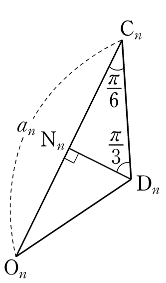


$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{O}_n\mathrm{F}_n = \dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n} = \overline{\mathrm{O}_n\mathrm{F}_n}$이므로

삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n\mathrm{F}_n$은 정삼각형이다.

$\angle \mathrm{O}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle \mathrm{C}_n\mathrm{O}_n\mathrm{D}_n = \dfrac{\pi}{6}$이므로

삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$은 $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{D}_n} = \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}$인 이등변삼각형이다.



그림에서

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{N}_n} = \dfrac{1}{2}a_n$

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$이다.

따라서 $a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$이다.

그림 R_1에서 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{3}\pi$이고

직사각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ S_1 = \dfrac{1}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$= \frac{\pi - \sqrt{3}}{3-1}$$
$$= \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$
답 ④

17 | y좌표가 1인 점이 7개,
y좌표가 2인 점이 5개,
y좌표가 3인 점이 3개이다.
두 점의 y좌표가 같은 경우는 각각 ${}_7\mathrm{C}_2$, ${}_5\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_2$ 가지이므로
구하는 확률은

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2} = \frac{10}{21+10+3} = \frac{10}{34} = \frac{5}{17}$$

답 ②

18 | ㄱ. $AB + A + B = 2E$

$A(B+E) + B + E = 2E + E$

$(A+E)(B+E) = 3E$ $\cdots$ ㉠

$\therefore\ (A+E)^{-1} = \dfrac{1}{3}(B+E)$ $\quad\therefore$ 참

ㄴ. ㉠에서

$(A+E)(B+E) = 3E$이므로

$(A+E)(B+E) = (B+E)(A+E)$

정리하면

$AB + A + B + E = BA + B + A + E$

$AB = BA$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. $A^3+E=O$에서 $(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A+E$의 역행렬이 존재하므로

$A^2-A+E=O$

위 식에서

$(A+E)(A-2E)=-3E$

$\therefore (A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$

㉠에서

$(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$

$\therefore\ \frac{1}{3}(B+E)=-\frac{1}{3}(A-2E)$

$A+B=E$ $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

19 | A, B 두 과목의 시험 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면

$X \simeq \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $Y \simeq \mathrm{N}(m+3,\ \sigma^2)$

$\mathrm{P}(X\ge 80)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$와

$\mathrm{P}(Z\ge 1.34)=0.5-0.41=0.09$에서

$\frac{80-m}{\sigma}=1.34$ …㉠

$\mathrm{P}(Y\ge 80)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{80-m-3}{\sigma}\right)=0.15$와

$\mathrm{P}(Z\ge 1.04)=0.5-0.35=0.15$에서

$\frac{77-m}{\sigma}=1.04$ …㉡

㉠, ㉡에서 $3=0.3\sigma$

$\therefore\ \sigma=10,\ m=66.6$

$m+\sigma=76.6$ 답 ⑤

20 | $f(x)=x^n e^{-x}$에서

$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$

$f''(x)$

$=e^{-x}\{-x^{n-1}(n-x)+n(n-1)x^{n-2}-nx^{n-1}\}$

$=e^{-x}x^{n-2}\{x^2-2nx+n(n-1)\}$

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$

$f'\left(\frac{n}{2}\right)=e^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}\left(n-\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$

이므로 $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f'(x)=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$에서

$0<x<n$일 때 $f'(x)>0$

$x>n$일 때 $f'(x)<0$

이므로 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore$ 참

ㄷ. $f''(x)=e^{-x}x^{n-2}\{x^2-2nx+n(n-1)\}$에서

n이 4 이상의 짝수인 경우 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하지 않는다.

따라서 $x=0$에서 변곡점을 갖는다고 말할 수 없다. $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

신유형 문제 / 출제 가능 문제

21 | $f(t)$와 n은 정수이므로

$9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2$도 정수이어야 한다.

$0\le g(t)<1$에서

$0\le\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2<\frac{4}{9}$이므로

$0\le 9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2<4n$

$\therefore\ -n\le f(t)<3n$

함수 $y=g(t)$는 $0\leqq g(t)<1$인 모든 실수값을 치역으로 가지므로, $f(x)$는 $-n\leqq f(t)<3n$인 모든 정수값을 치역으로 가진다.

$\therefore\ a_n=-n+(-n+1)+\cdots+(3n-1)$

$=\frac{2n-1}{2}\times 4n=2n(2n-1)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n-1)}{n^2}=4$ 답 ①

22 | 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공비가 2이므로 $a_1+a_2+a_4=a+2a+8a=55$

$\therefore a=5$

$a_3=4a=20$ 답 20

23 | $\log_8 x-\log_8(x-7)=\log_8\frac{x}{x-7}$이고

$\frac{1}{3}=\log_8 2$이므로 $\frac{x}{x-7}=2$ (단, $x>7$)

$x=2x-14$에서 $x=14$ 답 14

24 | 직선과 평면이 수직이면 직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터가 서로 평행이다.

$\therefore (2, a, 4) /\!/ (2, 5, b)$

따라서 $a=5,\ b=4$

한편 $(1, 1, -2)$를 지나므로

$2+5-2b+c=0 \quad \therefore c=1$

따라서 $a+b+c=10$ 답 10

25 | $a>1$이므로 타원의 두 초점은 $(0, \pm\sqrt{a^2-1})$

쌍곡선의 두 초점은 $(\pm\sqrt{2},\ 0)$이므로

사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{a^2-1}\times 2\sqrt{2}=12$

$\sqrt{2(a^2-1)}=6$에서 $a^2-1=18$

$\therefore a^2=19$ 답 19

26 | $abc=2^n$이고 a, b, c가 모두 2 이상의 자연수이므로 a, b, c는 모두 2의 거듭제곱수이어야 한다.

$a=2^x,\ b=2^y,\ c=2^z$ (x, y, z는 자연수)라 하면

$abc=2^n$에서 $x+y+z=n$이 성립해야 한다.

그런데 x, y, z는 모두 자연수이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

문제에서 순서쌍의 개수가 28이므로

$\frac{(n-1)(n-2)}{2}=28$ (단, $n\geq 1$)

$\therefore\ n=9$ 답 9

27 | 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $x=-4,\ x=0$이므로 $f(x)=x(x+4)$

$\sqrt{x+1}-x=t$라 하면 $f(t)=t^2+4t=5$

$\therefore t=1$ 또는 $t=-5$

i) $\sqrt{x+1}-x=1$에서 $\sqrt{x+1}=x+1$

(단, $x\geq -1$)

$x+1=(x+1)^2,\ x+1=0$ 또는 $x+1=1$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-1$

ii) $\sqrt{x+1}-x=-5$에서 $\sqrt{x+1}=x-5$

(단, $x\geq 5$)

$x+1=(x-5)^2,\ x^2-11x+24=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=8$

그런데 $x=3$은 무연근이므로 $x=8$

i), ii)에서, 모든 실근의 합은

$0+(-1)+8=7$ 답 7

28 | $l_1 /\!/ l_2$이고 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$이므로 선분 AB와 l_2가 이루는 각 중 예각은 θ이다.

선분 $\overline{\mathrm{CB}}$가 l_2와 이루는 각 중 예각이 5θ이고 $\angle\mathrm{BCD}$가 2θ이므로 l_2와 선분 $\overline{\mathrm{CD}}$가 이루는 각 중 예각은 3θ이다.

$\triangle\mathrm{ABC}$에서

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 4\theta}$ … ㉠

$\triangle\mathrm{BCD}$에서

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 3\theta}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin 2\theta}$ … ㉡

두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리가 1이므로

$T_1=(\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이$)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}$

$T_2=(\triangle\mathrm{BCD}$ 의 넓이$)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}}$

$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$이다.

㉠÷㉡에서 $\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}\frac{\sin 2\theta}{\sin 4\theta}$이므로

$\therefore \frac{T_1}{T_2}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BD}}}=\frac{\sin 3\theta\cdot\sin 4\theta}{\sin\theta\cdot\sin 2\theta}$

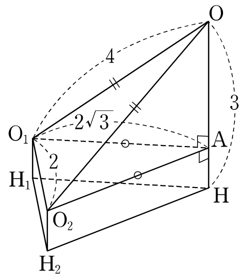
$\lim_{\theta\to+0}\frac{T_1}{T_2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin 3\theta\cdot\sin 4\theta}{\sin\theta\cdot\sin 2\theta}=6$ 답 6

출제 가능 문제

29 | 두 점 $\mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3$를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 γ라고 하자. 단면 D는 구 S_3의 중심을 지나는 평면에 의한 단면이므로 D의 넓이는 π이다.

S의 중심을 O라 하고, 네 점 $\mathrm{O},\ \mathrm{O}_1,\ \mathrm{O}_2,\ \mathrm{O}_3$를 α에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H},\ \mathrm{H}_1,\ \mathrm{H}_2,\ \mathrm{H}_3$라 하자.

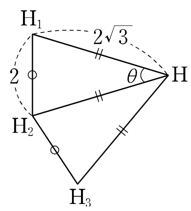
세 구 $S,\ S_1,\ S_2$에서



O_1, O_2를 지나고 α에 평행한 평면이 $\overline{OH}$와 만나는 점을 A라 하면, $\overline{OA}=2$, $\overline{OO_1}=4$이므로

$\overline{O_1A}=2\sqrt{3}$

이제 H, H_1, H_2, H_3를 그림으로 나타내면



$\angle H_1HH_2=\theta$라 하면

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$에서 $\cos\theta=1-2\frac{1}{12}=\frac{5}{6}$이고

$\angle H_1H_2H_3=2\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)=\pi-\theta$이므로

두 직선 $\overleftrightarrow{H_1H_2}$와 $\overleftrightarrow{H_2H_3}$가 이루는 각은 θ이다.

이때 β와 γ의 교선은 $\overleftrightarrow{O_2H_2}$이고,

$\overline{O_2H_2}\perp\overline{O_2O_1}$, $\overline{O_2H_2}\perp\overline{O_2O_3}$이므로

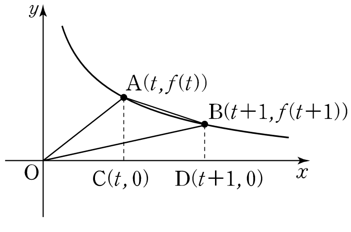
β와 γ가 이루는 이면각은 두 직선 $\overleftrightarrow{O_2O_1}$, $\overleftrightarrow{O_2O_3}$가 이루는 각과 같고, 이것은 $\overleftrightarrow{H_2H_1}$와 $\overleftrightarrow{H_2H_3}$가 이루는 각 θ와 같다.

따라서 구하는 넓이는 $\pi\cdot\cos\theta=\frac{5}{6}\pi$이다.

$\therefore\ p+q=11$ 답 11

출제 가능 문제

30



조건 (가)에 의해 (나)를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다. 그림과 같이 점 A, B, C, D를 정의하자.

$\triangle ABO$의 넓이는 $\triangle AOC$와 사다리꼴 ABDC의 합에서 $\triangle OBD$의 넓이를 제외한 것이다.

그러므로 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2}\{(t+1)f(t)-t\,f(t+1)\}$이다.

조건 (나)에 의하여

$\frac{1}{2}\{(t+1)f(t)-t\,f(t+1)\}=\frac{t+1}{t}$이며

정리하면,

$\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$이다. $\cdots$ ㉠

$\int\frac{f(t)}{t}dt=G(t)$라 하면,

㉠에서

$\int\frac{f(t)}{t}dt-\int\frac{f(t+1)}{t+1}dt=\int\frac{2}{t^2}dt$

$\Rightarrow G(t)-G(t+1)=-\frac{2}{t}+C$ $\cdots$ ㉡

(다)에서

$\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=2$이므로 ㉡식에 의하여,

$\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=G(2)-G(1)=-(-2+C)=2$

그러므로 $C=0$

마찬가지로

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=G\left(\frac{11}{2}\right)-G\left(\frac{7}{2}\right)$이다. $\cdots$ ㉢

㉡식에서 $t=\frac{7}{2}$과 $t=\frac{9}{2}$를 대입하여 정리해 보면,

$$\begin{cases} G\left(\frac{7}{2}\right)-G\left(\frac{9}{2}\right)=-\frac{4}{7} \\ G\left(\frac{9}{2}\right)-G\left(\frac{11}{2}\right)=-\frac{4}{9} \end{cases}$$

같은 변끼리 더하면,

$G\left(\frac{7}{2}\right)-G\left(\frac{11}{2}\right)=-\frac{64}{63}$이다.

그러므로 ㉢에서,

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{64}{63}$

$\therefore\ p+q=63+64=127$ 답 127

[다른 풀이]

위의 풀이에서 ㉠이후로, $\dfrac{f(t+1)}{t+1}-\dfrac{f(t)}{t}=-\dfrac{2}{t^2}$

$g(t)=\dfrac{f(t)}{t}$라 하면, $\displaystyle\int_1^2 g(x)dx=2$

$g(t+1)-g(t)=-\dfrac{2}{t^2}$

$\displaystyle\int_a^{a+1} g(t+1)dt-\int_a^{a+1} g(t)dt=\int_a^{a+1} -\frac{2}{t^2}dt,$

$\displaystyle\int_{a+1}^{a+2} g(t)dt-\int_a^{a+1} g(t)dt=\frac{2}{a+1}-\frac{2}{a},$

$\displaystyle\int_{a+1}^{a+2} g(t)dt-\frac{2}{a+1}=\int_a^{a+1} g(t)dt-\frac{2}{a}$

따라서 임의의 실수 a에 대하여

$\displaystyle\int_a^{a+1} g(t)dt-\frac{2}{a}=C$(상수)

$\displaystyle\int_1^2 g(x)dx=2$이므로 $a=1$을 대입하면

$2+C=2 \quad \therefore\ C=0$

$\displaystyle\int_a^{a+1} g(t)dt=\frac{2}{a}$이므로

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$

$\displaystyle=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$

$=\dfrac{2}{\frac{7}{2}}+\dfrac{2}{\frac{9}{2}}$

$=\dfrac{4}{7}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{64}{63}$

$\therefore\ p+q=63+64=127$ 답 127