

제 2 교시

수리 영역

나 형

성명		수험 번호																	
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('가' 형/ '나' 형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

1.  $\log_8 2\sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{16}$     ②  $\frac{1}{8}$     ③  $\frac{1}{4}$     ④  $\frac{1}{2}$     ⑤ 1

2. 두 행렬  $X, Y$ 에 대하여

$$X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

일 때,  $2X$ 는? [2점]

- ①  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$     ②  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$     ③  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$   
 ④  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$     ⑤  $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^{n+1} + 5}{3^n - 1}$ 의 값은? [2점]

- ① 2    ② 3    ③ 5    ④ 6    ⑤ 10

4. 두 상수  $a, b$ 에 대하여 방정식  $\begin{pmatrix} a & -1 \\ b-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 가 해를 갖지 않을 때,  $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① 1    ② 2    ③ 3    ④ 4    ⑤ 5

5. 두 상수  $a, b$ 에 대하여 행렬  $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ 가  $A^2 = A$ 이고  $a^2 + b^2 = 10$ 일 때,  $(a + b)^2$ 의 값은? [3점]

- ① 6      ② 7      ③ 8      ④ 9      ⑤ 10

6. 부등식

$$\log \frac{1}{2}(x-5) + \log \frac{1}{2}(x-6) > -1$$

의 해가  $\alpha < x < \beta$ 일 때,  $\alpha + \beta$ 의 값은? [3점]

- ① 7      ② 10      ③ 13      ④ 16      ⑤ 19

7. 수렴하는 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1} = \frac{3}{4}$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

8.  $1 \leq \log n < 3$ 인 자연수  $n$ 에 대하여  $\log_2 n$ 이 정수가 되도록 하는  $n$ 의 개수는? [3점]

- ① 3      ② 4      ③ 5      ④ 6      ⑤ 7

9. 두 함수  $y=2^x$ ,  $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 선분 AB의 중점의 좌표가  $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ 일 때, 상수  $k$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$     ② 1    ③  $\frac{3}{2}$     ④ 2    ⑤  $\frac{5}{2}$

10. 2 이상인 두 자연수  $a, b$ 에 대하여  $R(a, b)$ 를  $R(a, b) = \sqrt[4]{b}$ 로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $R(16, 4) = R(8, 2)$ ㄴ. $R(a, 5) \cdot R(b, 5) = R(a+b, 5)$ ㄷ. $R(a, b) = k$ 이면 $a = \log_k b$ 이다.
---

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 두 이차정사각행렬  $A, B$ 에 대하여  $A^2=A$ 이고  $B=-A$ 일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

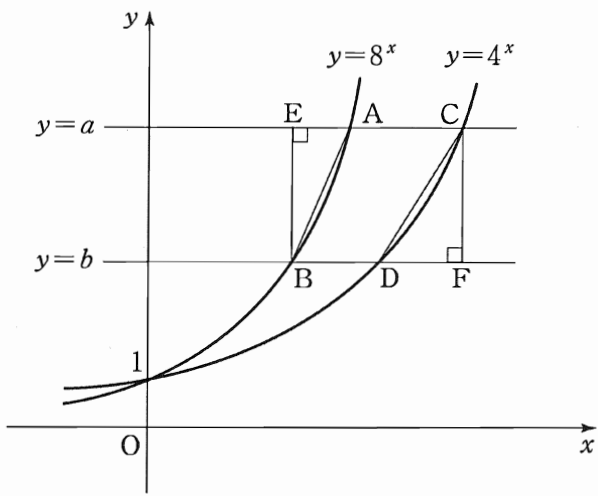
ㄱ. $A^3=A$ ㄴ. $B^2=-B$ ㄷ. $A+3E$ 는 역행렬을 갖는다. (단, $E$ 는 단위행렬이다.)
---

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. 어느 동아리에 속한 여학생 수와 남학생 수가 같다. 이 동아리에서 3명의 대표를 선출하려고 한다. 남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수가 여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수의 10배일 때, 이 동아리에 속한 여학생 수는? [3점]

- ① 7                      ② 8                      ③ 9                      ④ 10                      ⑤ 11

13. 그림과 같이 함수  $y=8^x$ 의 그래프가 두 직선  $y=a, y=b$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수  $y=4^x$ 의 그래프가 두 직선  $y=a, y=b$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선  $y=a$ 에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선  $y=b$ 에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는? (단,  $a > b > 1$ 이다.) [3점]



- ① 26    ② 28    ③ 30    ④ 32    ⑤ 34

14. 다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 부등식

$$\frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(n+1)!} < \frac{2}{n+1}$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

자연수  $n$ 에 대하여

$$a_n = \frac{1! + 2! + 3! + \dots + n!}{(n+1)!}$$

이라 할 때,  $a_n < \frac{2}{n+1}$ 임을 보이면 된다.

(1)  $n=1$ 일 때,  $a_1 = \frac{1!}{2!} = \frac{1}{2} < 1$ 이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(2)  $n=k$ 일 때,  $a_k < \frac{2}{k+1}$ 라고 가정하면  $n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1! + 2! + 3! + \dots + (k+1)!}{(k+2)!} \\ &= \boxed{\text{가}} (1 + a_k) \\ &< \boxed{\text{가}} \left(1 + \frac{2}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k+2} + \boxed{\text{나}} \end{aligned}$$

이다.

자연수  $k$ 에 대하여  $\frac{2}{k+1} \leq 1$ 이므로

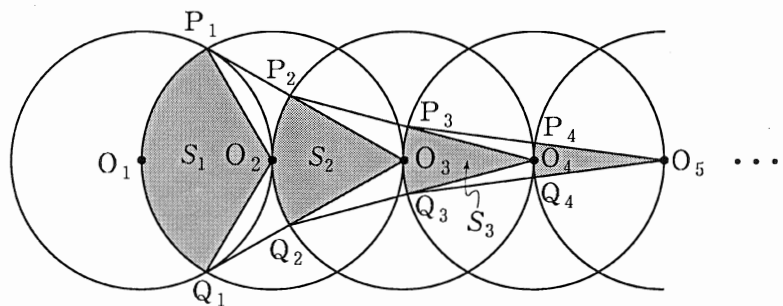
$$\boxed{\text{나}} \leq \frac{1}{k+2} \text{ 이고 } a_{k+1} < \frac{2}{k+2} \text{ 이다.}$$

따라서  $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다. 그러므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [3점]

- |   |                 |                        |
|---|-----------------|------------------------|
|   | (가)             | (나)                    |
| ① | $\frac{1}{k+2}$ | $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ |
| ② | $\frac{1}{k+2}$ | $\frac{2}{(k+1)(k+2)}$ |
| ③ | $\frac{1}{k+1}$ | $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ |
| ④ | $\frac{1}{k+1}$ | $\frac{2}{(k+1)(k+2)}$ |
| ⑤ | $\frac{1}{k+1}$ | $\frac{2}{(k+1)^2}$    |

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이  $O_1, O_2, O_3, \dots$ 인 원들이 있다. 모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고,  $\overline{O_n O_{n+1}} = 1 (n=1, 2, 3, \dots)$ 이다.  
 두 원  $O_1, O_2$ 가 만나는 두 점을 각각  $P_1, Q_1$ 이라 하고, 부채꼴  $O_2 P_1 Q_1$ 의 넓이를  $S_1$ 이라 하자.  
 두 점  $P_1, Q_1$ 에서 원  $O_3$ 의 중심과 연결한 선분이 원  $O_3$ 과 만나는 두 점을 각각  $P_2, Q_2$ 라 하고, 부채꼴  $O_3 P_2 Q_2$ 의 넓이를  $S_2$ 라 하자.  
 두 점  $P_2, Q_2$ 에서 원  $O_4$ 의 중심과 연결한 선분이 원  $O_4$ 와 만나는 두 점을 각각  $P_3, Q_3$ 이라 하고, 부채꼴  $O_4 P_3 Q_3$ 의 넓이를  $S_3$ 이라 하자.  
 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 부채꼴  $O_{n+1} P_n Q_n$ 의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{\pi}{2}$                       ②  $\frac{2}{3}\pi$                       ③  $\frac{5}{6}\pi$
- ④  $\pi$                               ⑤  $\frac{7}{6}\pi$

16. 다음은 19세기 초 조선의 유학자 홍길주가 소개한 제곱근을 구하는 계산법의 일부를 재구성한 것이다.

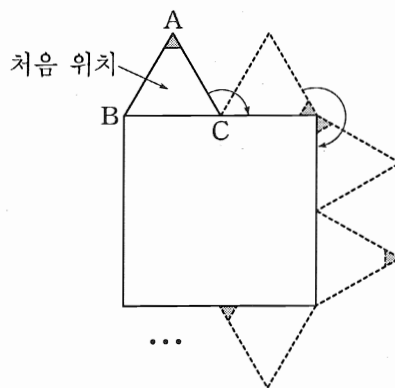
1보다 큰 자연수  $p$ 에서 1을 뺀 수를  $p_1$ 이라 한다.  
 $p_1$ 이 2보다 크면  $p_1$ 에서 2를 뺀 수를  $p_2$ 라 한다.  
 $p_2$ 가 3보다 크면  $p_2$ 에서 3을 뺀 수를  $p_3$ 이라 한다.  
 $\vdots$   
 $p_{k-1}$ 이  $k$ 보다 크면  $p_{k-1}$ 에서  $k$ 를 뺀 수를  $p_k$ 라 한다.  
 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 수  $p_n$ 이  $(n+1)$ 보다 작으면 이 과정을 멈춘다.  
 이때,  $2p_n$ 이  $(n+1)$ 과 같으면  $p$ 는 (가)이다.

(가)에 들어갈 식으로 알맞은 것은? [4점]

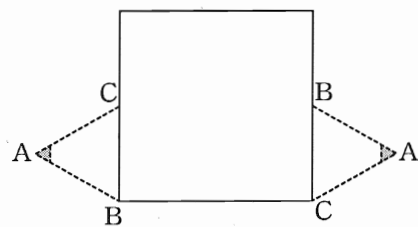
- ①  $n+1$                       ②  $\frac{(n+1)^2}{2}$                       ③  $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
- ④  $2^{n+1}$                       ⑤  $(n+1)!$

17. 한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를  $n$ 바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를  $a_n$ 이라 하자.  
 예를 들어  $n=1$ 일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로  $a_1=2$ 이다.

이때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n-2}}{n}$ 의 값은? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

- ① 8                      ② 10                      ③ 12                      ④ 14                      ⑤ 16

단답형

18. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$  일 때,  $a_{47}$ 의 값을 구하시오. [3점]

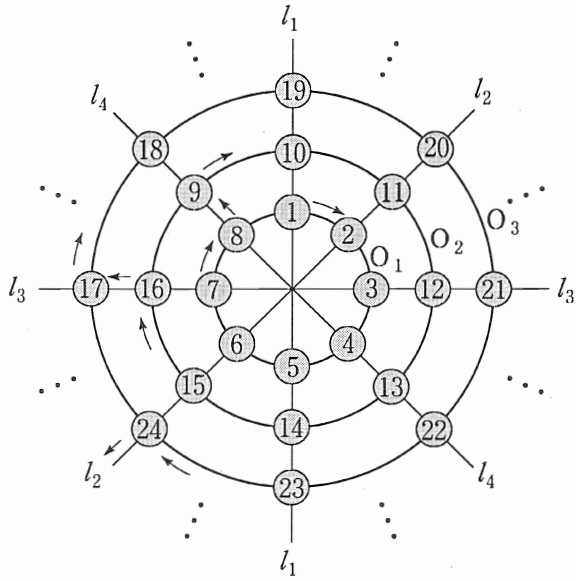
19. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 가  $AB^{-1} = B^{-1}A$ 를 만족시킬 때,  $a$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 다항식  $(x-1)^n$ 의 전개식에서  $x$ 의 계수가  $-12$ 일 때,  $n$ 의 값을 구하시오. [3점]

21. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 3$ 이고  $a_{n+1} - a_n = 4n - 3$ 일 때,  $a_{10}$ 의 값을 구하시오. [3점]

22. 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼 평행이동시킨 그래프가 함수  $y = \log_b x$ 의 그래프와 점  $(9, 2)$ 에서 만날 때,  $10a + b$ 의 값을 구하시오. [4점]

23. 다음 그림은 동심원  $O_1, O_2, O_3, \dots$ 과 직선  $l_1, l_2, l_3, l_4$ 의 교점 위에 자연수를 1부터 차례로 적은 것이다.

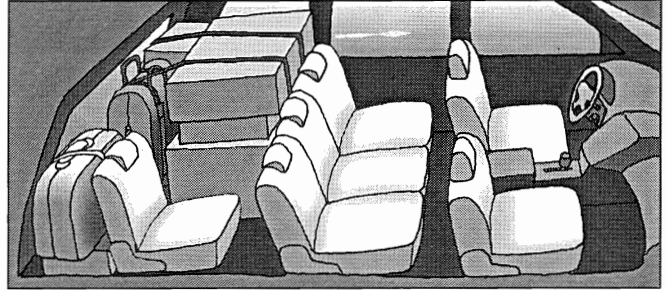


이미 채워진 수들의 규칙에 따라 계속하여 적어 나가면 475는 원  $O_m$ 과 직선  $l_n$ 의 교점 위에 있다.  $m+n$ 의 값을 구하시오. [4점]

24. 다음 조건을 만족시키는 세 정수  $a, b, c$ 를 더한 값을  $k$ 라 할 때,  $k$ 의 최대값과 최소값의 합을 구하시오. [4점]

- (가)  $1 \leq a \leq 5$
- (나)  $\log_2(b-a) = 3$
- (다)  $\log_2(c-b) = 2$

25. 할머니, 할아버지, 어머니, 아버지, 영희, 철수 모두 6명의 가족이 자동차를 타고 여행을 가려고 한다. 이 자동차에는 앉을 수 있는 좌석이 그림과 같이 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 1개가 있다. 운전석에는 아버지나 어머니만 앉을 수 있고, 영희와 철수는 가운데 줄에만 앉을 수 있을 때, 가족 6명이 모두 자동차의 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



5지선다형

26. 두 양수  $a, b$ 에 대하여  $5^{\log b} = a^{2\log 5}$ 이고

행렬  $\begin{pmatrix} a & -1 \\ -b & 2 \end{pmatrix}$ 가 역행렬을 갖지 않을 때,  $ab$ 의 값은? [3점]

- ① 8      ② 12      ③ 16      ④ 25      ⑤ 27

27. 함수  $f(x) = \log_5 x$ 이고  $a > 0, b > 0$ 일 때,  
 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2 = \left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$
ㄴ. $f(a+1) - f(a) > f(a+2) - f(a+1)$
ㄷ. $f(a) < f(b)$ 이면 $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$ 이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 다음 표는 어느 학교에서 한 달 전에 구입한 휴대용 저장 장치의 용량에 따른 1개당 가격과 개수의 현황을 나타낸 것이다.

용량	128 MB	256 MB	512 MB	1 GB	2 GB
1개당 가격	$a$	$\frac{3}{2}a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 a$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 a$
개수	$16b$	$8b$	$4b$	$2b$	$b$

현재 모든 휴대용 저장 장치의 가격이 한 달 전보다 모두 40%씩 하락하였다. 이 학교에서 휴대용 저장 장치의 용량과 개수를 위 표와 동일하게 현재의 가격으로 구입한다면 지불해야 하는 금액은? (단,  $a > 0$ 이고  $b > 0$ 이다.) [4점]

- ①  $\frac{128}{5} ab \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$                       ②  $32ab \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$   
 ③  $32ab \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$                       ④  $\frac{192}{5} ab \left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right\}$   
 ⑤  $\frac{192}{5} ab \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right\}$

29. 1부터 9까지의 서로 다른 자연수  $a, b, c, d, e$ 에 대하여

$$a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$

로 나타내어지는 다섯 자리의 자연수  $abcde$  중에서 5의 배수이고

$$a > b > c, c < d < e$$

를 만족시키는 모든 자연수의 개수는? [4점]

- ① 53                      ② 62                      ③ 71                      ④ 80                      ⑤ 89

단답형

30. 등차수열  $\{a_n\}$ 에서

$$a_1 = 4, a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = 28$$

일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ 의 값을 구하십시오. [4점]

\* 확인 사항  
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하십시오.